

На правах рукописи

Плотникова Светлана Валерьевна

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ТОЧНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ
ОБОЛОЧКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
УПРУГИХ И ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Тамбов – 2013

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»).

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Куликов Геннадий Михайлович

Официальные оппоненты: **Лопаницын Евгений Анатольевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная и вычислительная математика» ФГБОУ ВПО «Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)»

Наседкин Андрей Викторович доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования ФГАОУ ВПО «Южный федеральный университет»

Шешенин Сергей Владимирович доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики композитов ФГБОУ МПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится 12 декабря в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.260.07 ФГБОУ ВПО «ТГТУ» по адресу: г. Тамбов, ул. Ленинградская, д. 1, ауд. 160.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенных гербовой печатью, просим направлять по адресу: 392000, г.Тамбов, ул. Советская, 106, ФГБОУ ВПО «ТГТУ», ученому секретарю диссертационного совета Д 212.260.07.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «ТГТУ». Автореферат диссертации размещен на официальном сайте Минобрнауки РФ: www.vak.ed.gov.ru

Автореферат разослан « ____ » _____ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор технических наук, доцент
С.Я. Егоров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время метод конечных элементов широко применяется в различных областях техники для расчета тонкостенных конструкций под действием механических, температурных, электрических нагрузок и т.п. Однако современное состояние теории конечных элементов нельзя считать удовлетворительным, поэтому число работ, посвященных разработке новых подходов к конечно-элементному моделированию конструкций, продолжает расти.

Одна из проблем состоит в том, что наиболее широко представленные в коммерческих пакетах программ изопараметрические вырожденные элементы, которые рассматривают оболочку как совокупность плоских элементов, в некоторых классах задач показывают невысокую производительность. Альтернативой вырожденным являются геометрически точные элементы, в которых отсчетная поверхность оболочки описывается аналитически заданными функциями, в частности сплайнами, а векторы перемещений представляются в локальном базисе, связанном с отсчетной поверхностью. Другая проблема состоит в том, что традиционные элементы тонких пластин и оболочек, построенные на основе теории Тимошенко-Миндлина, используют упрощенные соотношения закона Гука, что в некоторых случаях, например, в задачах электроупругости или в контактных задачах, нередко приводит к неудовлетворительным результатам. Отсюда возникает задача разработки эффективных трехмерных элементов оболочки, позволяющих учесть полные уравнения состояния пространственной теории упругости и электроупругости.

Применение композитных материалов, в том числе текстильных композитов, делает актуальным расчет конструкций, подверженных большим перемещениям и поворотам. Традиционный подход к решению таких задач состоит в использовании большого числа шагов по нагрузке (инкрементов), что является вычислительно неэффективным. Таким образом, выбор адекватной математической модели, точно представляющей произвольно большие перемещения и повороты, вместе с эффективным вычислительным алгоритмом являются крайне важными.

Другой аспект актуальности связан с применением конечно-элементного подхода к моделированию конструкций с пьезоэлектрическими актюаторами. Во многих практических приложениях, например в задаче управления формой конструкции в режиме реального времени, решающее значение имеет быстрота программного кода, поэтому эффективность применяемого при расчетах конечно-элементного метода играет большую роль.

Целью диссертационной работы является построение эффективных конечных элементов упругих и электроупругих оболочек, позволяющих учитывать большие перемещения и повороты, в том числе под действием следящих нагрузок и при контакте оболочки с жестким основанием.

Задачи диссертационной работы. Достижение заявленной цели связано с выполнением следующих задач:

- разработка математической модели оболочки, точно описывающей большие перемещения и повороты оболочки как жесткого тела, и позволяющей учесть полные уравнения состояния пространственной теории упругости;
- разработка и обоснование конечных элементов слоистой композитной оболочки, свободных от запирающих и позволяющих использование редких сеток;

- разработка эффективных алгоритмов, позволяющих при решении геометрически нелинейных задач использовать малое число шагов по нагрузке, в том числе при учете следящей нагрузки, а также при контактном взаимодействии с жестким телом;
- разработка эффективных методов расчета контакта геометрически нелинейной оболочки с жестким основанием;
- разработка эффективного конечного элемента пьезоэлектрической слоистой оболочки;
- применение пьезоэлектрического конечного элемента для решения задачи оптимизации формы оболочки.

Объектом исследования являются упругие и электроупругие слоистые композитные оболочки, подверженные действию механических (в том числе следящих) и электрических нагрузок.

Методы исследования. Базовым методом исследования является метод конечных элементов. Также используются методы вариационного исчисления, условной оптимизации, численные методы решения систем линейных и нелинейных уравнений, методы полиномиальной аппроксимации.

Научная новизна. Автором получены новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

- 7-параметрическая модель слоистой оболочки, точно описывающая произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных конвективных координатах и позволяющая учитывать полные уравнения состояния пространственной теории упругости;
- геометрически точный гибридный элемент оболочки, использующий метод введенных деформаций, основанный на аналитическом интегрировании в пределах элемента, который позволяет решать задачи нелинейного деформирования за малое число шагов по нагрузке с существенным снижением числа итераций в методе Ньютона-Рафсона;
- модель контактного взаимодействия упругой оболочки с жестким выпуклым телом, в которой контактные ограничения оболочки, подверженной большим перемещениям и поворотам, записываются аналитически, что позволяет получать решение контактных задач за малое число шагов по нагрузке и с использованием редких конечно-элементных сеток;
- конечно-элементный подход к решению задачи деформирования оболочки под действием следящего нагружения, основанный на новом вариационном уравнении типа Ху-Васидзу, позволяющий решать задачи в геометрически нелинейной постановке за малое число итераций;
- 7-параметрическая модель пьезоэлектрической оболочки, использующая полные уравнения состояния пространственной теории электроупругости;
- геометрически точный гибридный элемент пьезоэлектрической оболочки, предназначенный для решения связанных актюаторных задач при больших перемещениях и поворотах;
- метод нахождения напряжения, подаваемого на электроды пьезоэлектрических актюаторов, который позволяет приблизить форму оболочки к требуемой за счет минимизации аналитически заданной функции погрешности.

Обоснованность и достоверность результатов обеспечивается применением общих уравнений пространственной теории упругости и электроупругости. Результаты расчетов сравниваются с результатами экспериментов, известными аналитическими решениями и численными решениями, полученными с помощью других методов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы заключается в разработке методов расчета тонкостенных слоистых упругих и электроупругих конструкций, которые позволяют эффективно моделировать поведение конструкций при больших деформациях с учетом контактного взаимодействия с жестким основанием. Практическая значимость заключается в появлении новых возможностей при проектировании и эксплуатации тонкостенных адаптивных конструкций из композитных материалов. Разработанный конечно-элементный код позволяет применять его для программирования микропроцессоров адаптивных систем. На основе разработанных в диссертации алгоритмов созданы пакеты программ для ЭВМ, зарегистрированные в Государственном реестре программ для ЭВМ. Исследования, проводимые в рамках диссертации, поддерживались грантами INTAS N 95-0525 (1997–1999); РФФИ/DFG № 98-01-04076; РФФИ № 04-01-00070, № 08-01-00373, № 13-01-00155; АВЦП Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» № 2.1.1/660, № 2.1.1/10003; государственное задание Министерства образования и науки РФ № 1.472/2011 (2012–2013). Под руководством автора по тематике исследования защищена кандидатская диссертация по специальности 05.13.18. Разработанный пакет программ используется в учебном процессе на Архитектурно-строительном факультете Тамбовского государственного технического университета.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на IX, XI, симпозиумах «Проблемы шин и резинокордных композитов», 1998, 2000 (Москва); Международном симпозиуме «60 лет воссоздания МАМИ», 1999 (Москва); Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», 2002 (Тамбов); International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 2004 (Madeira, Portugal), 2009 (Phuket, Thailand), 2011 (Nanjing, China); International Conference on Computational Structures Technology, 2004 (Lisbon, Portugal), 2010 (Valencia, Spain); Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», 2004 (Казань); IX международной научно-технической конференции по динамике и прочности автомобиля, 2005 (Москва); International Symposium on Design Modelling and Experiments of Adaptive Structures and Smart Systems, 2006 (Bardonecchia, Italy), 2007 (Bad Herrenalb, Germany), 2011 (Urspelt, Luxembourg); 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, 2009 (Lisbon, Portugal); II международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела», 2009 (Казань); 9th Conference «Shell Structures: Theory and Applications», 2009 (Jurata, Poland); International Symposium of Aircraft Materials, 2010 (Marrakech, Morocco); EUROMECH Colloquium "Shell-like Structures - Non-classical Theories and Applications", 2011 (Wittenberg, Germany); International Conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures, 2012 (Turin, Italy); IV международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций», 2012 (Запорожье, Украина), XIX международном симпозиуме им. А.Г. Горшкова «Механические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», 2013 (Ярополец, Моск. обл.).

Публикации результатов. По теме диссертации опубликовано 56 работ, из них 39 статей в научных периодических изданиях из Перечня ВАК и международных реферируемых журналах, 9 докладов в материалах всероссийских и международных конференций, получены 7 свиде-

тельств о регистрации программ в Государственном реестре программ для ЭВМ.

Выносимые на защиту результаты получены соискателем лично. В публикациях, написанных в соавторстве личный вклад автора заключается в: [5, 7, 8, 12, 40, 41, 44] – постановка и формализация задачи исследования; [12, 14, 15, 42, 43] – разработка аналитической модели оболочки, [2-4, 6, 9-11, 14-28, 34, 38, 42-43, 45-49] – построение конечно-элементной модели оболочки; [11, 17, 25-28, 45, 47, 49] – формулировка модели контактного взаимодействия оболочки с твердым телом; [3, 7, 8, 10, 12, 13, 40-42] – разработка 7-параметрической модели пьезоэлектрической оболочки; [2-4, 6, 9-11, 14-39, 42, 43, 45-49] – разработка алгоритмов и их программная реализация.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы из 265 наименований. Объем диссертационной работы составляет 306 страниц, включая 108 рисунков и 62 таблицы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика научного направления, обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цель и основные задачи исследования, раскрывается научная новизна и практическая значимость результатов, дается краткое описание работы по главам.

В первой главе дается анализ современного состояния исследуемых в диссертации проблем. Представлен обзор работ, посвященных простейшим математическим моделям геометрически нелинейной оболочки. Отмечаются работы А.Н. Андреева, В.В. Болотина, К.З. Галимова, Э.И. Григолюка, Я.М. Григоренко, Г.М. Куликова, Ю.В. Немировского, Ю.Н. Новичкова, В.Н. Паймушина, Р.Б. Рикардса, П.П. Чулкова, Койтера, Рейсснера, Сандерса и других ученых.

Проанализированы работы, связанные с построением изопараметрических конечных элементов оболочки в геометрически нелинейной постановке. Существенный вклад в развитие изопараметрических элементов оболочки внесли зарубежные ученые Бате, Же, Зенкевич, Ли, Париш, Рамм, Сансур, Тейлор, Хьюз. Отмечено, что наиболее распространенными являются вырожденные конечные элементы, которые представляют оболочку как совокупность плоских элементов. При расчете нелинейного деформирования оболочки эти конечные элементы обладают существенными дефектами известными в литературе как сдвиговое и мембранное запирающие. Эти дефекты преодолеваются с помощью сокращенного интегрирования в пределах конечного элемента или метода введенных деформаций. Также отмечено, что стандартная конечно-элементная формулировка в форме метода перемещений является слишком жесткой. В связи с этим активно развиваются гибридные конечные элементы геометрически нелинейных оболочек, на основе вариационных принципов Ху-Васидзу или Хеллингера-Рейсснера. Особенность гибридных конечных элементов состоит в использовании независимых аппроксимаций деформаций и результирующих напряжений в пределах конечного элемента с последующим исключением дополнительных степеней свободы на элементном уровне.

Альтернативой вырожденным изопараметрическим элементам являются геометрически точные конечные элементы оболочки, основанные на точном описании геометрии оболочки в криволинейных конвективных координатах и способные корректно описать ее мембранно-изгибные связи. Термин «геометрически точный» означает, что коэффициенты первой

и второй фундаментальных форм отсчетной поверхности и символы Кристоффеля вычисляются точно в каждом узле. Проанализирована возможность использования метода введенных деформаций для преодоления не только сдвигового, но и мембранного заперения геометрически точного конечного элемента оболочки. Отмечено преимущество использования метода независимых аппроксимаций деформаций и результирующих напряжений для решения геометрически нелинейных задач статики тонкостенных конструкций. Указано, что геометрически точные конечные элементы оболочки, подверженной большим перемещениям и поворотам, построены сравнительно недавно в работах Г.М. Куликова и автора диссертации.

Представлена классификация конечных элементов оболочки с условным разделением их на классы в зависимости от вида используемой теории. Простейшей является 5-параметрическая модель оболочки на основе теории Тимошенко-Миндлина. В этой модели пренебрегается поперечными нормальными деформациями и напряжениями и используется пять степеней свободы в узлах элемента. Это могут быть три перемещения срединной поверхности оболочки и два угла поворота нормали, либо пять перемещений (тангенциальные перемещения лицевых поверхностей и поперечное перемещение срединной поверхности). Хотя построенные на основе 5-параметрической модели конечные элементы показывают хорошие результаты при расчете тонких оболочек, они не свободны от ряда недостатков. Во-первых, при решении геометрически нелинейных задач с помощью этих элементов приходится вводить вращательную степень свободы, что не дает возможность точно описать смещение оболочки как жесткого тела. Во-вторых, использование упрощенных соотношений обобщенного закона Гука не позволяет получить корректных решений для некоторых важных задач, например, для пьезоэлектрических оболочек. К лучшим результатам приводит 6-параметрическая модель оболочки, в которой вводится шесть перемещений лицевых поверхностей. Эта модель позволяет точно описать произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела в криволинейных конвективных координатах, однако все еще не позволяет использовать полные уравнения состояния пространственной теории упругости. Причиной является то, что поперечная нормальная деформация распределена равномерно по толщине оболочки. Пространственная 7-параметрическая модель оболочки, в которой наряду с шестью перемещениями лицевых поверхностей дополнительно вводится поперечное перемещение срединной поверхности, является свободной от всех отмеченных выше недостатков. Это достигается за счет линейного изменения поперечной нормальной деформации по толщине оболочки.

Задачи контактного взаимодействия тонкостенных конструкций в трехмерной постановке рассматривались В.М. Александровым, Ю.П. Артюхиным, Л.А. Галиным, Э.И. Григолюком, В.М. Толкачевым, Бельчко, Вригерсом, Симо, Тейлором, Штайном и многими другими учеными. С приложением к задачам механики пневматических шин эти задачи изучались А.Е. Белкиным, В.Л. Бидерманом, Э.И. Григолюком, Г.М. Куликовым, С.Л. Соколовым, С.В. Шешениным, Нуром, Ротертом. При этом последний автор ошибочно считал нецелесообразным использование геометрически нелинейной теории оболочек для решения задачи контактного взаимодействия пневматической шины с жестким основанием. Отмечается также, что при решении контактных задач на основе 5-параметрической модели оболочки не удается выполнить условие нулевого контактного давления на границе контактной зоны. Этому недостатка лишена 6-параметрическая модель, однако при ненулевых коэффициентах

Пуассона она приводит к завышенной жесткости оболочки в поперечном направлении. На основе анализа литературных источников сделан вывод о том, что 7-параметрическая модель оболочки является оптимальной с точки зрения решения исследуемых в диссертации задач. Она имеет минимальное число степеней свободы, при которых теория оболочек позволяет корректно описывать большие перемещения и произвольно большие повороты, позволяет использовать пространственные соотношения упругости и электроупругости, а также корректно решать задачи контактного взаимодействия оболочки с жесткими выпуклыми телами. Отмечается возможность построения на ее основе принципиально новых геометрически точных элементов оболочки свободных от всех видов запираания.

Представлен обзор работ, посвященных решению связанной задачи электроупругости для пьезоэлектрических оболочек в пространственной постановке. Важные результаты в этой области получены А.В. Белоконом, А.О. Ватульяном, В.А. Еремеевым, Б.А. Кудрявцевым, Г.М. Куликовым, Г.И. Михасевым, А.В. Наседкиным, В.З. Партоном, Н.Н. Рогачевой, А.Н. Соловьевым, Бенджеду, Вагнером, Ву-Куоком, Же, Каррерой, Клинкем и другими учеными. В заключение главы дан анализ работ, посвященных решению задачи оптимизации формы адаптивных тонкостенных конструкций с непрерывно или дискретно распределенными по их лицевым поверхностям пьезоэлектрическими актуаторами.

Во второй главе построена 7-параметрическая модель оболочки. Вначале приведено геометрическое описание недеформированной оболочки. Оболочка толщины h может быть определена как трехмерное тело объема V , ограниченное двумя лицевыми поверхностями Ω^- и Ω^+ , а также граничной поверхностью Σ (рис.1). Отсчетная поверхность описывается с помощью ортогональных криволинейных координат θ_1 и θ_2 , направленных вдоль линий главных кривизн, координата θ_3 направлена вдоль единичного вектора \mathbf{a}_3 , перпендикулярного отсчетной поверхности. Здесь и в дальнейшем изложении греческие индексы α, β принимают значения 1, 2; латинские индексы i, j, m, n принимают значения 1, 2, 3; индексы I, J означают принадлежность величины к нижней или верхней поверхностям и принимают значения – или +.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ – радиус-вектор произвольной точки отсчетной поверхности; $\mathbf{R}^I = \mathbf{r} + z^I \mathbf{a}_3$ – радиус-векторы лицевых поверхностей; $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha}$ – ковариантные базисные векторы отсчетной поверхности, z^I – поперечные координаты лицевых поверхностей. Перейдем к ортонормированному базису $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_3$, так что $\mathbf{a}_\alpha = A_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_3$, где A_α – коэффициенты первой фундаментальной формы отсчетной поверхности. Векторы перемещений и их производные по θ_3 на лицевых и срединной поверхностях также представим в ортонормированном базисе:

$$\mathbf{u}^A = \sum_i u_i^A \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\beta}^A = \mathbf{u}_{,3}^A = \sum_i \beta_i^A \mathbf{e}_i, \quad (A = -, +, M). \quad (1)$$

Далее обоснованы деформационные соотношения 9-параметрической модели оболочки, а на их базе построены деформационные соотношения 7-параметрической модели. Введены основные допущения 7-параметрической модели оболочки:

II. 1 Полагаем, что тангенциальные перемещения распределены по толщине оболочки линейно, тогда как поперечное перемещение распределено по квадратичному закону, т.е.

$$u_\alpha = \sum_I N^I u_{\alpha}^I, \quad u_3 = \sum_A L^A u_3^A \quad (A = -, +, M; I = -, +), \quad (2)$$

$$N^- = \frac{1}{h}(z^+ - \theta_3), \quad N^+ = \frac{1}{h}(\theta_3 - z^-),$$

$$L^- = N^-(N^- - N^+), \quad L^M = 4N^-N^+, \quad L^+ = N^+(N^+ - N^-).$$

II. 2 Полагаем, что тангенциальные и поперечная нормальная компоненты тензора деформаций распределены по толщине оболочки линейно, а поперечные касательные компоненты являются постоянными по толщине:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_I N^I \varepsilon_{\alpha\beta}^I, \quad \varepsilon_{33} = \sum_I N^I \varepsilon_{33}^I, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = (\varepsilon_{\alpha 3}^- + \varepsilon_{\alpha 3}^+)/2. \quad (3)$$

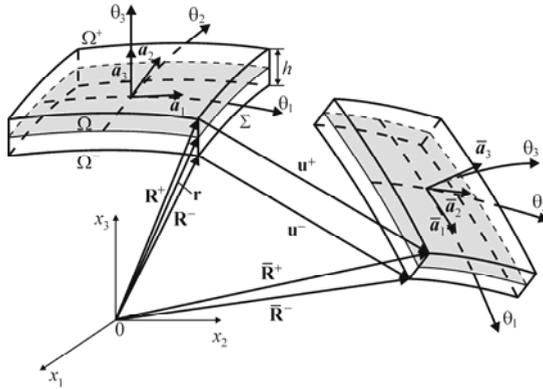


Рисунок 1. Исходная и деформированная конфигурация оболочки.

Деформации на лицевых поверхностях вычисляются точно из известных соотношений теории упругости:

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^I = c_\alpha^I \lambda_{\alpha\beta}^I + c_\beta^I \lambda_{\beta\alpha}^I + \sum_i \lambda_{i\alpha}^I \lambda_{i\beta}^I, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3}^I = c_\alpha^I \beta_{\alpha}^I + \lambda_{3\alpha}^I + \sum_i \beta_i^I \lambda_{i\alpha}^I, \quad (4)$$

$$2\varepsilon_{33}^I = 2\beta_3^I + \sum_i \beta_i^I \beta_i^I,$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{\alpha,\alpha}^I + B_\beta u_\beta^I + k_3 u_3^I, \quad \lambda_{\beta\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha}^I - B_\beta u_\alpha^I, \quad (\alpha \neq \beta) \quad (5)$$

$$\lambda_{3\alpha}^I = \frac{1}{A_\alpha} u_{3,\alpha}^I - k_\alpha u_\alpha^I, \quad B_\beta = \frac{1}{A_\alpha A_\beta} A_{\alpha,\beta}.$$

$$c_1^I = 1 + k_1 z^I, \quad c_2^I = 1 + k_2 z^I.$$

Здесь c_α^I – компоненты геометрического тензора сдвига, k_α – главные кривизны отсчетной поверхности, производные перемещений по поперечной координате β_i^I находятся из закона (2). Достоинством полученных деформационных соотношений является то, что они точно представляют произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела.

Для получения смешанного вариационного уравнения вводим независимые деформации и полагаем, что они имеют такое же распределение по толщине оболочки, как и зависящие от перемещений деформации:

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \sum_I N^I E_{\alpha\beta}^I, \quad \hat{\varepsilon}_{33} = \sum_I N^I E_{33}^I, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha 3} = E_{\alpha 3}, \quad (6)$$

Вводим результирующие напряжений для слоистой оболочки по закону:

$$H_{\alpha\beta}^I = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} N^I d\theta_3, \quad H_{\alpha 3} = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{\alpha 3}^{(n)} d\theta_3, \quad (7)$$

$$H_{33}^I = \sum_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} \sigma_{33}^{(n)} N^I d\theta_3,$$

где $\sigma_{ij}^{(n)}$ – напряжения на n -ом слое ($n = \overline{1, N}$), z_n – координаты лицевых поверхностей слоев, N – число слоев. Подставляя распределения (3), (6) в пространственный функционал Ху-Васидзу и интегрируя по θ_3 с учетом (7), получим функционал для 7-параметрической оболочки. Варьируя полученный функционал по независимым переменным, получим смешанное вариационное уравнение типа Ху-Васидзу:

$$\iint_{\Omega} \left[\delta \mathbf{E}^T (\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{E}) + \delta \mathbf{H}^T (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + \delta W^{\text{ext}} = 0, \quad (8)$$

где \mathbf{v} – вектор перемещений; \mathbf{p} – вектор поверхностных нагрузок; $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{E} – зависящий от перемещений и независимый векторы деформаций; \mathbf{H} – вектор результирующих напряжений; \mathbf{D} – материальная матрица жесткости, W^{ext} – работа внешних сил на граничной поверхности Σ . Указанные здесь векторы имеют следующую структуру:

$$\mathbf{v} = \left[u_1^- \ u_2^- \ u_3^- \ u_1^+ \ u_2^+ \ u_3^+ \ u_3^M \right]^T, \quad \mathbf{p} = \left[p_1^- \ p_2^- \ p_3^- \ p_1^+ \ p_2^+ \ p_3^+ \ 0 \right]^T, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{11}^- \ \varepsilon_{11}^+ \ \varepsilon_{22}^- \ \varepsilon_{22}^+ \ \varepsilon_{33}^- \ \varepsilon_{33}^+ \ 2\varepsilon_{12}^- \ 2\varepsilon_{12}^+ \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23} \right]^T,$$

$$\mathbf{E} = \left[E_{11}^- \ E_{11}^+ \ E_{22}^- \ E_{22}^+ \ E_{33}^- \ E_{33}^+ \ 2E_{12}^- \ 2E_{12}^+ \ 2E_{13} \ 2E_{23} \right]^T,$$

$$\mathbf{H} = \left[H_{11}^- \ H_{11}^+ \ H_{22}^- \ H_{22}^+ \ H_{33}^- \ H_{33}^+ \ H_{12}^- \ H_{12}^+ \ H_{13} \ H_{23} \right]^T.$$

В третьей главе на основе 7-параметрической модели построен геометрически точный четырехузловой элемент оболочки. Разбиваем отсчетную поверхность оболочки на прямоугольные элементы в плоскости (θ_1, θ_2) . Отображение элемента на квадрат в плоскости (ξ_1, ξ_2) представлено на рис. 2. Зададим векторы перемещений и зависимых деформаций в r -ом узле элемента ($r = \overline{1, 4}$) \mathbf{v}_r и $\boldsymbol{\varepsilon}_r$. Полагаем, что поле перемещений внутри элемента распределено по билинейному закону

$$\mathbf{v} = \sum_r N_r \mathbf{v}_r, \quad (10)$$

где N_r – стандартная билинейная функция формы, которая принимает значение, равное 1, в r -ом узле, а в остальных узлах элемента равна 0.

Учитывая деформационные соотношения (4), зависящие от перемещений деформации в узлах элемента можно записать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{B}_r \mathbf{U} + (\mathbf{A}_r \mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \left[v_1^T \ v_2^T \ v_3^T \ v_4^T \right]^T, \quad (11)$$

где \mathbf{B}_r - аналитически заданные матрицы; \mathbf{A}_r – постоянный трехмерный массив $10 \times 28 \times 28$, соответствующий нелинейной части деформационных соотношений (4); $\mathbf{A}_r \mathbf{U}$ – симметричные матрицы порядка 10×28 . Для описания зависимых деформаций внутри элемента применяем билинейную аппроксимацию

$$\boldsymbol{\varepsilon}^A = \sum_r N_r \boldsymbol{\varepsilon}_r = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \boldsymbol{\varepsilon}^{r_1 r_2} \quad (r_1 = \overline{0,1}, \quad r_2 = \overline{0,1}), \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{r_1 r_2} = \mathbf{B}^{r_1 r_2} \mathbf{U} + (\mathbf{A}^{r_1 r_2} \mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad (13)$$

где массивы $\mathbf{B}^{r_1 r_2}$, $\mathbf{A}^{r_1 r_2}$ выражаются через \mathbf{B}_r и \mathbf{A}_r .

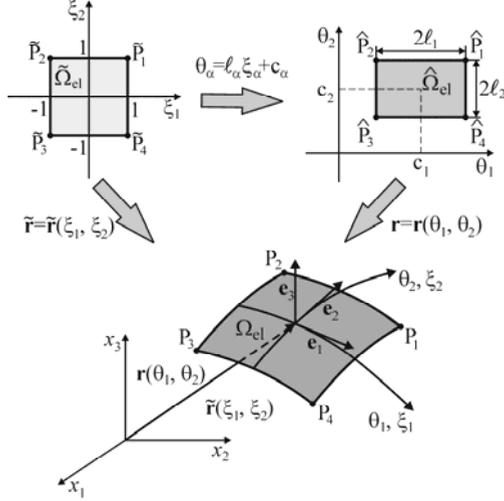


Рисунок 2. Отображение квадрата в плоскости (ξ_1, ξ_2) на геометрически точный элемент оболочки в пространстве (x_1, x_2, x_3) .

Для независимых деформаций и результирующих напряжений предложена следующая аппроксимация:

$$\mathbf{E} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad \mathbf{H} = \sum_{r_1, r_2} (\xi_1)^{r_1} (\xi_2)^{r_2} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{E}^{11} = \left[E_{33}^{-11} \ E_{33}^{+11} \right]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{E}^{00} = \left[E_{11}^{-00} \ E_{11}^{+00} \ E_{22}^{-00} \ E_{22}^{+00} \ E_{33}^{-00} \ E_{33}^{+00} \ 2E_{12}^{-00} \ 2E_{12}^{+00} \ 2E_{13}^{00} \ 2E_{23}^{00} \right]^T,$$

$$\mathbf{E}^{01} = \left[E_{11}^{-01} \ E_{11}^{+01} \ E_{33}^{-01} \ E_{33}^{+01} \ 2E_{13}^{01} \right]^T, \quad \mathbf{E}^{10} = \left[E_{22}^{-10} \ E_{22}^{+10} \ E_{33}^{-10} \ E_{33}^{+10} \ 2E_{23}^{10} \right]^T,$$

$$\mathbf{H}^{00} = \left[H_{11}^{-00} \ H_{11}^{+00} \ H_{22}^{-00} \ H_{22}^{+00} \ H_{33}^{-00} \ H_{33}^{+00} \ H_{12}^{-00} \ H_{12}^{+00} \ H_{13}^{00} \ H_{23}^{00} \right]^T,$$

$$\mathbf{H}^{01} = \left[H_{11}^{-01} \ H_{11}^{+01} \ H_{33}^{-01} \ H_{33}^{+01} \ H_{13}^{01} \right]^T, \quad \mathbf{H}^{10} = \left[H_{22}^{-10} \ H_{22}^{+10} \ H_{33}^{-10} \ H_{33}^{+10} \ H_{23}^{10} \right]^T,$$

$$\mathbf{H}^{11} = \left[H_{33}^{-11} \ H_{33}^{+11} \right]^T,$$

где \mathbf{Q}^{00} – единичная матрица порядка 10×10 , \mathbf{Q}^{01} и \mathbf{Q}^{10} – проективные матрицы порядка 10×5 , \mathbf{Q}^{11} – проективная матрица порядка 10×2 . Заметим, что из (15) следует, что на элементе вводятся 22 независимые деформационные моды. Учитывая, что неизвестными на элементе являются 28 узловых перемещений, получаем, что элемент обладает шестью степенями свободы, необходимыми для корректного описания перемещения элемента как жесткого целого. Подставляя интерполяции (10)-(14) в вариационное уравнение (8) и интегрируя аналитически, для чего полагаем метрический коэффициент $A_1 A_2$ постоянным на элементе, получим нелинейную систему уравнений равновесия для элемента:

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right] \mathbf{U}, \quad \mathbf{H}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (16)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1 + r_2}} \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2 \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} = \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} – вектор нагрузок, приведенный к узлам элемента.

Для решения нелинейной системы уравнений (16) введем инкрементальные значения перемещений, независимых деформаций и результирующих напряжений. В дальнейшем изложении левый верхний индекс t и $t + \Delta t$ означает положение величины в конфигурации t или $t + \Delta t$ (можно эти конфигурации рассматривать как состояния деформирования в различные моменты времени). В соответствии с этим обозначением запишем

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} &= {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = {}^t \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{E}^{r_1 r_2} = {}^t \mathbf{E}^{r_1 r_2} + \Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{H}^{r_1 r_2} &= {}^t \mathbf{H}^{r_1 r_2} + \Delta \mathbf{H}^{r_1 r_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta \mathbf{U}$, $\Delta \mathbf{F}$, $\Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и $\Delta \mathbf{H}^{r_1 r_2}$ – приращения соответствующих величин на текущем шаге по нагрузке. Подставляя (17) в систему уравнений (16) и учитывая, что в каждой конфигурации t внешние силы уравновешиваются компонентами второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа, получим систему нелинейных уравнений на текущем шаге:

$$\Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \left[{}^t \mathbf{M}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\Delta \mathbf{U}) \right] \Delta \mathbf{U}, \quad \Delta \mathbf{H}^{r_1 r_2} = \bar{\mathbf{D}}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (18)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1 + r_2}} \left\{ 2 \left[\mathbf{A}^{r_1 r_2}(\Delta \mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t \mathbf{H}^{r_1 r_2} + \left[{}^t \mathbf{M}^{r_1 r_2} + 2 \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\Delta \mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \Delta \mathbf{H}^{r_1 r_2} \right\} = \Delta \mathbf{F},$$

где

$${}^t \mathbf{M}^{r_1 r_2} = \mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2 \mathbf{A}^{r_1 r_2}({}^t \mathbf{U}), \quad \bar{\mathbf{D}}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2}. \quad (19)$$

Решаем полученную систему уравнений методом Ньютона-Рафсона. В качестве начального приближения берется решение линейной задачи. Для улучшения скорости сходимости итерационного процесса используется метод несовместимых мод, согласно которому сначала уравнения (18) линеаризуются, а затем из линеаризованной системы исключаются $\Delta \mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и $\Delta \mathbf{H}^{r_1 r_2}$. В итоге приходим к системе линейных уравнений для

приращения вектора узловых перемещений элемента $\Delta\hat{\mathbf{U}}^{[k]}$ на k -ой итерации метода Ньютона-Рафсона:

$$\mathbf{K}_T \Delta\hat{\mathbf{U}}^{[k]} = \Delta\mathbf{F}^{[k]}, \quad (20)$$

где $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_H$ – тангенциальная матрица жесткости; $\Delta\mathbf{F}^{[k]}$ – правая часть системы, которые находится по правилу:

$$\mathbf{K}_D = \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left({}^t\mathbf{L}^{r_1 r_2}[k] \right)^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{L}^{r_1 r_2}[k], \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_H = 2 \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left[\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \left({}^t\mathbf{H}^{r_1 r_2} + \Delta\mathbf{H}^{r_1 r_2}[k] \right) \right] \mathbf{A}^{r_1 r_2},$$

$$\Delta\mathbf{F}^{[k]} = \Delta\mathbf{F} - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left\{ \left({}^t\mathbf{L}^{r_1 r_2}[k] \right)^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} \left[{}^t\mathbf{L}^{r_1 r_2}[k] - \mathbf{A}^{r_1 r_2} \left(\Delta\mathbf{U}^{[k]} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t\mathbf{H}^{r_1 r_2} \right) \mathbf{A}^{r_1 r_2} \right\} \Delta\mathbf{U}^{[k]},$$

$${}^t\mathbf{L}^{r_1 r_2}[k] = \mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2} \left({}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^{[k]} \right). \quad \mathbf{D}^{r_1 r_2} = \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \bar{\mathbf{D}}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T.$$

Уравнения равновесия (20) для каждого элемента затем собираются в ансамбль с помощью стандартной процедуры. Полученное глобальное уравнение равновесия решается на каждой итерации методом Холецкого. Для окончания итерационного процесса используется условие

$$\left\| \Delta\hat{\mathbf{U}}_G^{[k+1]} - \Delta\hat{\mathbf{U}}_G^{[k]} \right\| < \varepsilon_N \left\| \Delta\hat{\mathbf{U}}_G^{[k]} \right\|, \quad (22)$$

где $\|\bullet\|$ означает Евклидову норму; \mathbf{U}_G – глобальный вектор узловых перемещений; ε_N – заданная точность.

Сравнение расчетов по 7-параметрической модели с известными аналитическими решениями задач линейной теории упругости Власова для пластин и Варадана и Баскара для цилиндрических оболочек показывает, что для тонких пластин и оболочек, когда отношение линейных размеров к толщине оболочки $S > 50$, погрешность модели составляет менее 2%.

Рассмотрена оболочка, представляющая собой полусферу, в верхней части которой вырезано отверстие 18° . Оболочка нагружается на экваторе двумя парами противоположно направленных сил, как показано на рис. 3, там же приведены геометрические и механические параметры задачи. Этот один из наиболее распространенных нелинейных тестов характерен тем, что в нем оболочка подвергается большим перемещениям и поворотам, но при этом ее растяжения малы. Таким образом, этот тест проверяет способность элемента описывать большие перемещения оболочки как жесткого целого. В таблице 1 приведены перемещения срединной поверхности в точках приложения силы, полученные с помощью разработанного в диссертации геометрически точного элемента GEX7P4 и с помощью изопараметрического элемента S4R, используемого в пакете ABAQUS. Как видим, они отличаются менее чем на 1%, но если геометрически точный элемент позволяет рассчитать деформированную конфигурацию, изображенную на рис. 3, за 1 шаг по нагрузке (NStep) и 7 итераций метода Ньютона-Рафсона (NIter), то элементу S4R для этого требует-

ся 27 неравномерных шагов по нагрузке и 136 итераций метода Ньютона-Рафсона.

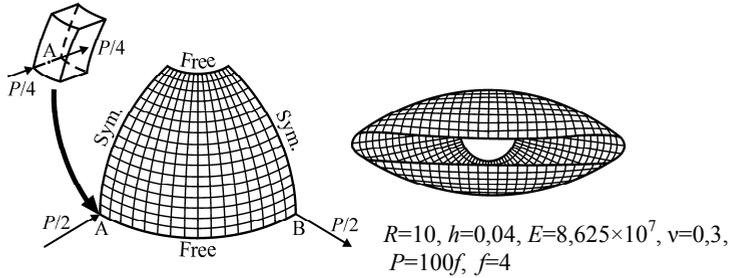


Рисунок 3. Сферическая оболочка с под действием сосредоточенных сил; геометрия и деформированное состояние.

Таблица 1. Перемещения точек А и В сферической оболочки при $\varepsilon_N=10^{-4}$.

	GEX7P4 4×4	GEX7P4 8×8	GEX7P4 16×16	S4R (ABAQUS) 16×16
$u_3(B)$	3,2690	3,9599	4,0608	4,067
$-u_3(A)$	7,0480	8,098	8,1312	8,178
NStep/NIter	1/7	1/7	1/7	27/136

Далее рассмотрена разрезанная по радиусу кольцевая пластина, геометрия которой изображена рис. 4а. Один край разреза жестко закреплен, а к другому приложена нагрузка P . На рис. 4б приведена деформированная конфигурация пластины. В таблице 2 и на рис. 4в приведены перемещения в точках А и В. При расчетах использовалась равномерная сетка геометрически точных элементов. Также приведено сравнение с расчетами с помощью изопараметрического элемента SR4 из пакета ABAQUS. Как видим, при расчете на экстремально редкой сетке 2×4 с помощью элемента GEX7P4 получаем 91 % от эталонного решения, полученного с помощью элемента SR4.

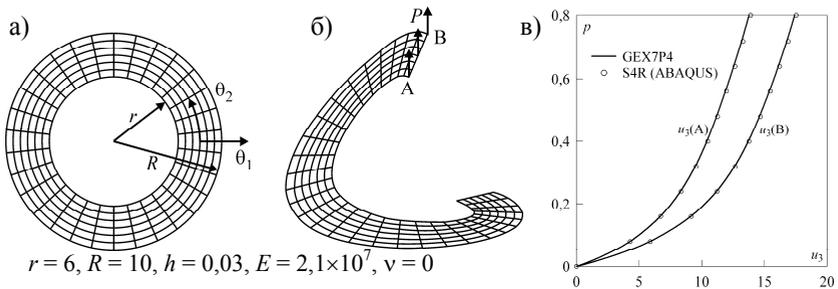


Рисунок 4. Разрезанная кольцевая пластина: а) геометрия; б) деформированная конфигурация; в) перемещения срединной поверхности.

В четвертой главе строится геометрически точный элемент оболочки, подверженной действию следящих нагрузок при больших перемещениях и поворотах. Полагаем, что действующие на оболочку нагрузки имеют следящий характер, т.е. направление действия нагрузки за-

висит от деформированной конфигурации оболочки. В практически значимых задачах, а именно при моделировании поведения оболочки под действием ветровых нагрузок, под действием внутреннего давления и т.п., вектор нагрузки направлен по нормали к деформированной нижней или верхней поверхности оболочки. Следовательно, для моделирования поведения оболочки под действием следящих нагрузок требуется получить уравнение нормали к деформированным лицевым поверхностям оболочки.

Таблица 2. Перемещения точек А и В кольцевой пластины при $\varepsilon_N = 10^{-4}$.

	GEX7P4 2×4	GEX7P4 4×8	GEX7P4 16×32	GEX7P4 10×80	S4R (ABAQUS) 10×80
$u_3(A)$	12,742	12,578	13,670	13,765	13,891
$u_3(B)$	16,029	16,096	17,307	17,402	17,528
NStep/NIter	1/6	1/7	1/10	1/13	67/346

Точные значения вектора нормали к деформированным лицевым поверхностям оболочки в скалярной форме запишем в виде:

$$\mathbf{n}^I = \frac{1}{\eta^I} \sum_i \eta_i^I \mathbf{e}_i, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \eta_1^I &= \lambda_{21}^I \lambda_{32}^I - \lambda_{31}^I (c_2^I + \lambda_{22}^I), & \eta_2^I &= \lambda_{12}^I \lambda_{31}^I - \lambda_{32}^I (c_1^I + \lambda_{11}^I), \\ \eta_3^I &= (c_1^I + \lambda_{11}^I)(c_2^I + \lambda_{22}^I) - \lambda_{12}^I \lambda_{21}^I, & \eta^I &= \sqrt{(\eta_1^I)^2 + (\eta_2^I)^2 + (\eta_3^I)^2}, \end{aligned}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}^I, \lambda_{3\alpha}^I, c_\alpha^I$ вычисляются по формулам (5). Для определенности полагаем, что следящая нагрузка действует на нижней поверхности оболочки и что вектор нагрузки имеет фиксированную длину \tilde{p} и направлены по нормали к поверхности Ω^+ :

$$\mathbf{p}^- = \tilde{p} \sum n_i^+ \mathbf{e}_i, \quad n_i^+ = \eta_i^+ / \eta^+. \quad (24)$$

Учитывая, что компоненты вектора нормали к лицевым поверхностям являются функциями от перемещений, получим смешанное вариационное уравнение для оболочки под действием следящей нагрузки

$$\iint_{\Omega} \left[\delta \mathbf{E}^T (\mathbf{H} - \mathbf{DE}) + \delta \mathbf{H}^T (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \tilde{p} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + \delta W^{\text{ext}} = 0, \quad (25)$$

где вектор зависящих от перемещения нагрузок имеет вид

$$\tilde{p} \mathbf{p} = \tilde{p} \begin{bmatrix} 0 & n_1^+ & 0 & n_2^+ & 0 & n_3^+ & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (26)$$

Переходим к построению геометрически точного конечного элемента оболочки, подверженной действию следящих нагрузок. Используя формулы (5), вычисляем компоненты векторов нормали к лицевым поверхностям в узлах элемента:

$$n_{ir}^+(\mathbf{U}) = \frac{\eta_{ir}^+(\mathbf{U})}{\eta_r^+(\mathbf{U})}, \quad \eta_r^+ = \sqrt{\sum_j (\eta_{jr}^+(\mathbf{U}))^2}. \quad (27)$$

Тогда значение вектора \mathbf{p} в узлах элемента:

$$\mathbf{p}_r(\mathbf{U}) = - \begin{bmatrix} 0 & n_{1r}^+(\mathbf{U}) & 0 & n_{2r}^+(\mathbf{U}) & 0 & n_{3r}^+(\mathbf{U}) & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (28)$$

Внутри элемента вводим билинейную аппроксимацию вектора нагрузок:

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{U}) = \sum_r N_r \mathbf{p}_r(\mathbf{U}). \quad (29)$$

Подставляя соотношения (10), (12)-(14), (28) в вариационное уравнение (28), получим систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{E}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right] \mathbf{U}, \quad \mathbf{H}^{r_1 r_2} = \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2}, \quad (30)$$

$$\sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} = \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{F}(\mathbf{U}),$$

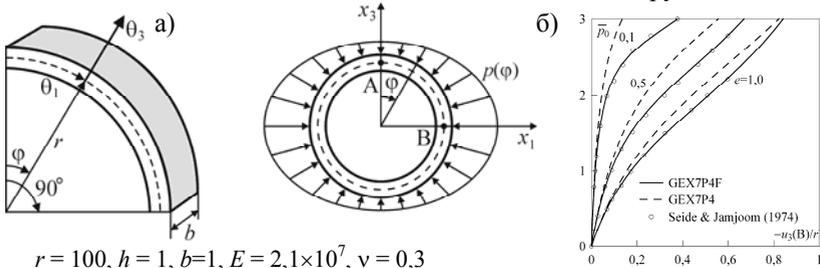
Применяем для решения полученной системы инкрементальный подход в Лагранжевой формулировке. Наряду с перемещениями \mathbf{U} , модами независимых деформаций $\mathbf{E}^{r_1 r_2}$ и результирующих напряжений $\mathbf{H}^{r_1 r_2}$, приращения которых определяются формулами (17), введем также приращения длины вектора следящей нагрузки: ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}} = {}^t \tilde{\mathbf{p}} + \Delta \tilde{\mathbf{p}}$. Получив систему уравнений равновесия на текущем шаге по нагрузке, линеаризуем полученные уравнения и исключаем на элементном уровне независимые деформации и результирующие напряжения. В итоге получаем систему линейных уравнений вида (20), где тангенциальная матрица жесткости находится по правилу $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_L$. Матрица \mathbf{K}_L , отвечающая действию следящего нагружения, и правая часть системы находятся по формулам:

$$\mathbf{K}_L = - \left({}^t \tilde{\mathbf{p}} + \Delta \tilde{\mathbf{p}} \right) \frac{\partial \mathbf{F}({}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{[k]})}{\partial \mathbf{U}}, \quad (31)$$

$$\Delta \mathbf{F}^{[k]} = - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left\{ \left({}^t \mathbf{L}^{r_1 r_2} [k] \right)^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} \left[{}^t \mathbf{L}^{r_1 r_2} [k] - \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\Delta \mathbf{U}^{[k]}) \right] \right.$$

$$\left. + 2\mathbf{R}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t \mathbf{H}^{r_1 r_2} \right) \right\} \Delta \mathbf{U}^{[k]} + \left({}^t \tilde{\mathbf{p}} + \Delta \tilde{\mathbf{p}} \right) \mathbf{F}({}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{[k]}) - {}^t \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{F}({}^t \mathbf{U}).$$

Для верификации модели рассмотрено изображенное на рис. 5а изотропное кольцо под действием неравномерно распределенного следящего давления $p(\varphi) = p_0(1 - e \cos 2\varphi)$. Вследствие симметрии четверть кольца моделировалась с помощью равномерных 18×1 сеток. Расчеты выполнены с помощью разработанных геометрически точных элементов оболочки GEX7P4F и GEX7P4 с учетом и без учета следящего нагружения.



$r = 100, h = 1, b = 1, E = 2,1 \times 10^7, \nu = 0,3$

Рисунок 5. Кольцо под действием следящей нагрузки: а) геометрия; б) перемещения срединной поверхности с учетом следящего нагружения (—) и без учета (---).

В табл. 3 приведены значения поперечного перемещения u_3^M в точках А и В, полученные путем использования разного числа шагов по нагрузке NStep, и показано полное число итераций NIter, необходимых для достижения заданной точности $\varepsilon_N = 10^{-6}$ согласно критерию сходимости (22). На рис. 5б показано, что найденные значения перемещений хорошо согласуются с аналитическими решениями, полученными Сейдом и Джамджумом. Отметим что, во-первых, решение задач изгиба кольца под действием следящего давления возможно без привлечения инкрементального подхода (NStep=1) и, во-вторых, число шагов по нагрузке не оказывает влияния на расчетные значения перемещений.

Таблица 3. Поперечное перемещение $\bar{u}_3 = u_3^M / r$ в точках А и В кольца при $e = 1$ и $\bar{p}_0 = 3$.

Элемент	NStep = 1			NStep = 5			NStep = 10		
	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter	$\bar{u}_3(A)$	$-\bar{u}_3(B)$	NIter
GEX7P4F	0,3660	0,8407	7	0,3660	0,8407	25	0,3660	0,8407	50
GEX7P4	0,3554	0,8220	6	0,3554	0,8220	18	0,3554	0,8220	30

В пятой главе диссертации построен геометрически точный конечный элемент для моделирования контактного взаимодействия оболочки с жестким выпуклым основанием при больших перемещениях и поворотах. Полагаем, что граница выпуклого жесткого тела Ω_b (рис. 6) является достаточно гладкой, и описываем ее уравнением

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (32)$$

где $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{k}_i$ – радиус-вектор точек поверхности Ω_b . Полагаем, что для внешних точек твердого тела выполняется неравенство

$$\Psi(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (33)$$

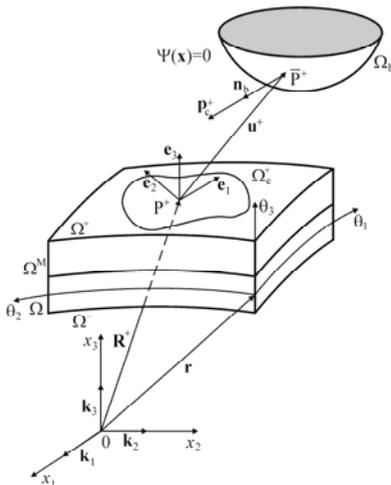


Рисунок 6. Контакт оболочки с твердым телом

Уравнения (32) и (33) можно рассматривать как условия непроникания с твердым телом, то выполняется равенство (32), а в точках, где оболочка отделена от твердого тела, выполняется неравенство (33). Условия непроникания являются нелинейными и могут быть выражены аналитически при произвольно больших деформациях оболочки через перемещения точек поверхности Ω^+ . Поверхность Ω^+ можно представить в виде объединения двух различных частей $\Omega^+ = \Omega_f^+ \cup \Omega_c^+$, где Ω_c^+ – часть верхней поверхности оболочки, вступающая в контакт с жестким телом, Ω_f^+ – свободная от контакта часть поверхности, на которой

возможно действие внешних сил. В случае, когда между поверхностями контакта нет трений и сцепления, контактное давление p_c^+ действует по нормали к поверхности контакта, так что можно записать

$$p_c^+ = -\mathbf{p}_c^+ \cdot \mathbf{n}_b \leq 0, \quad (34)$$

где \mathbf{n}_b – вектор единичной нормали к поверхности твердого тела Ω_b .

Из условий (32) и (34) следует выполнение уравнения

$$p_c^+(\mathbf{R}^+) \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) = 0, \quad \bar{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{R}^+ + \mathbf{u}^+, \quad \mathbf{u}^+ = \bar{u}_i^+ \mathbf{k}_i, \quad (35)$$

где \mathbf{R}^+ and $\bar{\mathbf{R}}^+$ – радиус-векторы поверхности Ω^+ , соответствующие начальной и деформированной состояниям оболочки; \mathbf{u}^+ – вектор перемещений поверхности Ω^+ .

Для того чтобы вести контактные ограничения в вариационную формулировку (8), воспользуемся методом множителей Лагранжа с регуляризацией, добавив отвечающее за контактное взаимодействие слагаемое к

функционалу Ху-Васидзу $J_{\text{HW}}: J_{\text{PL}} = J_{\text{HW}} + \iint_{\Omega_c} \left[\lambda \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) - \frac{\lambda^2}{2e} \right] dS$, где

$\lambda(\mathbf{R}^+) \leq 0$ – множитель Лагранжа; $e > 0$ – параметр регуляризации. Используя условие стационарности функционала J_{PL} по отношению к независимым переменным, получим вариационное уравнение

$$\iint_{\Omega} \left[\delta \mathbf{E}^T (\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{E}) + \delta \mathbf{H}^T (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 - \quad (36)$$

$$- \iint_{\Omega_c^+} \left[\lambda \delta \Psi(\mathbf{R}^+) + \delta \lambda \left(\Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) - \frac{1}{e} \lambda \right) \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + \delta W^{\text{ext}} = 0,$$

где вариация функции непроникания имеет вид

$$\delta \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) = \text{grad} \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) \cdot \delta \mathbf{u}^+,$$

причем существует следующая зависимость между контактным давлением и множителем Лагранжа:

$$p_c^+ = \lambda(\mathbf{R}^+) \left| \text{grad} \Psi(\bar{\mathbf{R}}^+) \right|. \quad (37)$$

При построении уравнения равновесия элемента применяем билинейные интерполяции (10), (12) и (14), которые позволяют аналитически вычислить интегралы в вариационном уравнении (36). Исключая на элементном уровне узловые значения множителя Лагранжа λ_r и приравнявая к нулю множители при вариациях перемещений, независимых деформаций и результирующих напряжений, получим систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \left[\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2} + \mathbf{A}^{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{U}) \right] \mathbf{U}, \quad \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} = (\mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2})^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{E}^{\eta_1 \eta_2}, \quad (38)$$

$$\sum_{\eta_1, \eta_2} \frac{1}{3^{\eta_1 + \eta_2}} \left[\mathbf{B}^{\eta_1 \eta_2} + 2\mathbf{A}^{\eta_1 \eta_2}(\mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{\eta_1 \eta_2} \mathbf{H}^{\eta_1 \eta_2} + \boldsymbol{\Xi} \lambda = \mathbf{F},$$

где λ – вектор значений множителя Лагранжа и Ξ – матрица градиентов функции непроникания в узлах элемента имеют вид

$$\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4]^T, \quad \Psi_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{1r}^+} & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{2r}^+} & \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{3r}^+} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (39)$$

$$\Xi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \Psi_1 & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Psi_2 & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Psi_3 & \mathbf{O}_{7 \times 1} \\ \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \mathbf{O}_{7 \times 1} & \Psi_4 \end{bmatrix}.$$

Дополнительно приравнивая к нулю множитель при $\delta \lambda_r$ в вариационном уравнении (36), получим с учетом (32), (33) и (37) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Psi_r &= \frac{1}{e} \lambda_r, \quad \lambda_r \leq 0 \quad \text{при } r \in I_C, \\ \Psi_r &> 0, \quad \lambda_r = 0 \quad \text{при } r \notin I_C, \end{aligned} \quad (40)$$

где $I_C \subset \{1, 2, 3, 4\}$ – множество узлов элемента, находящихся в контакте с твердым телом.

Для решения системы уравнений и неравенств (38), (40) применяем инкрементальный подход. К введенным ранее инкрементальным соотношениям (17) добавим следующее: ${}^{t+\Delta t} \lambda = {}^t \lambda + \Delta \lambda$. По алгоритму, описанному выше, получаем систему уравнений равновесия на текущем шаге по нагрузке, линеаризуем полученные уравнения и исключаем на элементном уровне независимые деформации и результирующие напряжения. В итоге получаем систему линейных уравнений вида (20), где тангенциальная матрица жесткости находится по правилу $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_H + e\mathbf{K}_C$. Правая часть системы и матрица \mathbf{K}_C , отвечающая действию контактного давления, находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}^{[k]} &= \Delta \mathbf{F} - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left\{ ({}^t \mathbf{L}^{r_1 r_2} [k])^T \mathbf{D}^{r_1 r_2} [{}^t \mathbf{L}^{r_1 r_2} [k] - \mathbf{A}^{r_1 r_2} (\Delta \mathbf{U}^{[k]})] \right\} \\ &+ 2\mathbf{R}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} {}^t \mathbf{H}^{r_1 r_2} \right) \Delta \mathbf{U}^{[k]} - e(\Xi \Theta) |_{t_{\mathbf{U}+\Delta \mathbf{U}}^{[k]}} + \Xi |_{t_{\mathbf{U}}^t} \lambda, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{a}_2 & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{a}_3 & \mathbf{O}_{7 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{O}_{7 \times 7} & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Здесь Θ – вектор вида $\Theta = [\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4]^T$, компоненты которого вычисляются по правилу

$$\Theta_r = \begin{cases} \Psi_r & \text{при } r \in {}^{t+\Delta t} I_C, \\ 0 & \text{при } r \notin {}^{t+\Delta t} I_C, \end{cases} \quad (43)$$

где \mathbf{a}_r – матрицы порядка 7×7 , которые задаются следующим образом:

$\mathbf{a}_r = \mathbf{O}_{7 \times 7}$ при $r \notin {}^{t+\Delta t}I_C$, а ненулевые компоненты остальных матриц вычисляются как

$$(\mathbf{a}_r)_{3+i,3+j} = \left(\Psi_r \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial u_{ir}^+ \partial u_{jr}^+} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{ir}^+} \frac{\partial \Psi_r}{\partial u_{jr}^+} \right) \Big|_{\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{[k]}} \quad \text{при } r \in {}^{t+\Delta t}I_C. \quad (44)$$

При формировании матрицы \mathbf{K}_C мы полагали, что для каждого элемента известно множество узлов ${}^{t+\Delta t}I_C$, входящих в контакт на текущем инкременте. Однако в общем случае множество таких узлов заранее не известно и его требуется определить. Для решения этой задачи используется метод проб и ошибок. На начальной итерации этого метода выбирается пробная зона контакта, т.е. задается множество узлов, входящих в контакт ${}^{t+\Delta t}I_C^G \subset \{1, 2, \dots, N^{\text{node}}\}$. Для заданной зоны контакта находится глобальный вектор узловых перемещений на текущем шаге по нагрузке ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_G$. Если зона контакта найдено верно, то для каждого узла должны выполняться неравенства

$$\Psi_s \Big|_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_G} > 0 \quad \text{при } s \in {}^{t+\Delta t}I_C^G, \quad (45)$$

$$\Psi_s \Big|_{{}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_G} \leq 0 \quad \text{при } s \notin {}^{t+\Delta t}I_C^G. \quad (46)$$

Если в каком-либо узле неравенство (45) не выполняется, то этот узел исключается из множества ${}^{t+\Delta t}I_C^G$, если же не выполняется неравенство (46), то соответствующий узел включается в множество ${}^{t+\Delta t}I_C^G$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока во всех узлах не будут выполнены неравенства (45), (46).

Для верификации построенной модели рассмотрена круговая арка, обжимаемая на жесткое основание сосредоточенной силой P , приложенной в верхнем сечении A , как показано на рис. 7. Эта задача исследовалась в ряде работ с целью изучения проблемы контактного взаимодействия тонкостенных конструкций, подверженных большим перемещениям и произвольно большим поворотам. Однако в указанных работах рассматривался только частный случай контакта с плоским основанием при $R_b = \infty$. В силу симметрии задачи моделировалась половина арки с помощью равномерной 30×1 или 60×1 элементов GEX7P4C. В таблице 4 приведено исследование сходимости в случае контактного взаимодействия арки и цилиндра радиуса $R_b = 1000$. Как видим, расчетное значение для безразмерной результирующей контактного давления \tilde{P}_c при уменьшении шага сетки приближается к точному значением безразмерного усилия $\tilde{P} = 120PR^2 / Eh^3b$, приложенного к арке. При удачном выборе начальной зоны контакта решение задачи можно получить за один шаг по нагрузке. Результаты расчета по разработанной модели хорошо согласуются с результатами Нура и Кима.

Совместив рассмотренный подход к моделированию контактного взаимодействия с методом учета следящего характера внешних нагрузок,

изложенным в четвертой главе, получим конечно-элементную модель контакта оболочки с жестким выпуклым телом под действием следящих нагрузок.

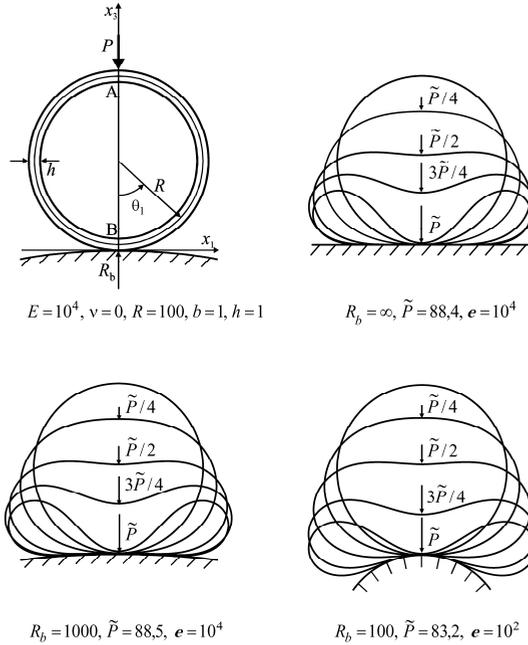


Рисунок 7. Контакт круговой арки с жестким цилиндром: а) геометрия; деформированная конфигурация для б) $R_b = \infty$; в) $R_b = 1000$; г) $R_b = 100$.

Таблица 4. Исследование сходимости для круговой арки под воздействием безразмерного усилия $\tilde{P} = 88,5$ в контакте с жестким цилиндром радиуса $R_b = 1000$, где $\varphi_0 = \pi/60$, $d_1 = [10\varphi_0, 12\varphi_0]$ и $d_2 = [11\varphi_0, 12\varphi_0]$.

Начальная зона контакта	сетка	e	NStep	NTE	NIter	расчетная зона контакта	\tilde{P}_c	$-u_3^M(A)$
{0}	30×1	10 ¹	2	22	132	{0} ∪ d ₁	88,95	198,4
{0}	30×1	10 ⁴	4	28	70	{0} ∪ d ₁	88,95	198,4
{0}	60×1	10 ¹	2	38	231	[0, φ ₀] ∪ d ₂	88,61	198,8
{0}	60×1	10 ⁴	5	57	277	[0, φ ₀] ∪ d ₂	88,61	198,8
{0} ∪ d ₁	30×1	10 ¹	1	1	10	{0} ∪ d ₁	88,95	198,4
{0} ∪ d ₁	60×1	10 ¹	1	10	90	[0, φ ₀] ∪ d ₂	88,61	198,8

В шестой главе построена конечно-элементная модель слоистой пьезоэлектрической оболочки, подверженной большим перемещениям и

поворотам. Рассмотрим оболочку, состоящую из N тонких слоев постоянной толщины $h_n = z_n - z_{n-1}$, включая пьезоэлектрические слои, где z_n – поперечная координата поверхности Ω_n . Полагаем, что электрический потенциал распределен по толщине пакета слоев согласно гипотезе ломаной линии

$$\varphi = \sum_n \left(\bar{N}_n^- \varphi_{n-1} + \bar{N}_n^+ \varphi_n \right), \quad \bar{N}_n^I = \begin{cases} N_n^I, & \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n] \\ 0, & \theta_3 \notin [z_{n-1}, z_n] \end{cases}, \quad (49)$$

$$N_n^- = \frac{1}{h_n} (z_n - \theta_3), \quad N_n^+ = \frac{1}{h_n} (\theta_3 - z_{n-1}), \quad \theta_3 \in [z_{n-1}, z_n],$$

где $\varphi_{n-1}(\theta_1, \theta_2)$, $\varphi_n(\theta_1, \theta_2)$ – значения электрического потенциала на нижней и верхней поверхностях n -го слоя.

Связь между вектором напряженности электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$ и электрическим потенциалом φ определяется посредством известного в электростатике уравнения: $\hat{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi$. Таким образом, вектор напряженности электрического поля имеет следующее распределение по толщине n -го слоя:

$$E_\alpha^{(n)} = N_n^- E_\alpha^{(n)-} + N_n^+ E_\alpha^{(n)+}, \quad E_3^{(n)} = -\frac{1}{h_n} (\varphi_n - \varphi_{n-1}), \quad (50)$$

$$E_\alpha^{(n)-} = -\frac{1}{A_\alpha} \varphi_{n-1,\alpha}, \quad E_\alpha^{(n)+} = -\frac{1}{A_\alpha} \varphi_{n,\alpha},$$

где $E_i^{(n)}$ – тангенциальные и поперечная компоненты вектора напряженности электрического поля n -го слоя.

Вводя распределения (2), (3), (6), (49), (50) в смешанное вариационное уравнение пространственной теории пьезоэлектричества, получим вариационное уравнение типа Ху-Васидзу для 7-параметрической пьезоэлектрической оболочки:

$$\iint_{\Omega} \left[\delta \mathbf{E}^T (\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{D}_{u\varphi} \hat{\mathbf{E}}) + \delta \hat{\mathbf{E}}^T (\mathbf{D}_{\varphi u} \mathbf{E} + \mathbf{D}_{\varphi\varphi} \hat{\mathbf{E}}) + \delta \mathbf{H}^T (\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{H} + \right. \quad (51) \\ \left. + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{q} \right] A_1 A_2 d\theta_1 d\theta_2 + \delta W^{\text{ext}} = 0,$$

где $\mathbf{D}_{u\varphi}$, $\mathbf{D}_{\varphi\varphi}$ – пьезоэлектрическая и диэлектрическая матрицы, \mathbf{q} – вектор поверхностных зарядов на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев, $\boldsymbol{\chi}$ – вектор электрических потенциалов на внешних поверхностях оболочки и поверхностях раздела слоев; $\hat{\mathbf{E}}$ – вектор напряженности электрического поля:

$$\boldsymbol{\chi} = [\varphi_0 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_N]^T, \quad (52)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \left[\left(\hat{\mathbf{E}}^{(1)} \right)^T \left(\hat{\mathbf{E}}^{(2)} \right)^T \dots \left(\hat{\mathbf{E}}^{(N)} \right)^T \right]^T, \quad \hat{\mathbf{E}}^{(n)} = \left[E_1^{(n)-} \ E_1^{(n)+} \ E_2^{(n)-} \ E_2^{(n)+} \ E_3^{(n)} \right]^T.$$

В следующем параграфе построена конечно-элементная модель пьезоэлектрической оболочки. Применяя билинейную аппроксимацию внутри элемента для векторов электрических потенциалов и напряженности элек-

трического поля, и выражая моды напряженности электрического поля через значения электрического потенциала в узлах элемента:

$$\widehat{\mathbf{E}}^{r_1 r_2} = -\mathbf{B}_\phi^{r_1 r_2} \Phi, \quad \Phi = \left[\chi_1^T \quad \chi_2^T \quad \chi_3^T \quad \chi_4^T \right]^T, \quad (53)$$

получим систему нелинейных уравнений равновесия для элемента:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{r_1 r_2} &= \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right] \mathbf{U}, \\ \mathbf{H}^{r_1 r_2} &= \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D} \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} + \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{D}_{уф} \mathbf{B}_\phi^{r_1 r_2} \Phi, \\ \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left[\mathbf{B}^{r_1 r_2} + 2\mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}) \right]^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{H}^{r_1 r_2} &= \mathbf{F}, \\ \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left(\mathbf{B}_\phi^{r_1 r_2} \right)^T \left[\left(\mathbf{D}_{уф} \right)^T \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \mathbf{E}^{r_1 r_2} - \mathbf{D}_{ф\phi} \mathbf{B}_\phi^{r_1 r_2} \Phi \right] &= \mathbf{F}_q. \end{aligned} \quad (54)$$

Применяем для решения системы нелинейных уравнений (54) метод Ньютона-Рафсона. При решении актуаторной задачи для оболочки, когда напряжение, подаваемое на электроды, известно, система линейных уравнений на k -ой итерации метода Ньютона-Рафсона, имеет вид (20), где вектор правых частей системы вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}^{[k]} &= \mathbf{F} - \sum_{r_1, r_2} \frac{1}{3^{r_1+r_2}} \left(\mathbf{U}^{r_1 r_2}[k] \right)^T \left[\mathbf{D}^{r_1 r_2} \mathbf{M}^{r_1 r_2}[k] \mathbf{U}^{[k]} + \mathbf{Q}^{r_1 r_2} \left(\mathbf{Q}^{r_1 r_2} \right)^T \mathbf{U}_u^{r_1 r_2} \right], \\ \mathbf{M}^{r_1 r_2}[k] &= \left(\mathbf{B}^{r_1 r_2} + \mathbf{A}^{r_1 r_2}(\mathbf{U}^{[k]}) \right) \mathbf{U}^{[k]}, \quad \mathbf{U}_u^{r_1 r_2} = \mathbf{D}_{уф} \mathbf{B}_\phi^{r_1 r_2} \Phi. \end{aligned} \quad (55)$$

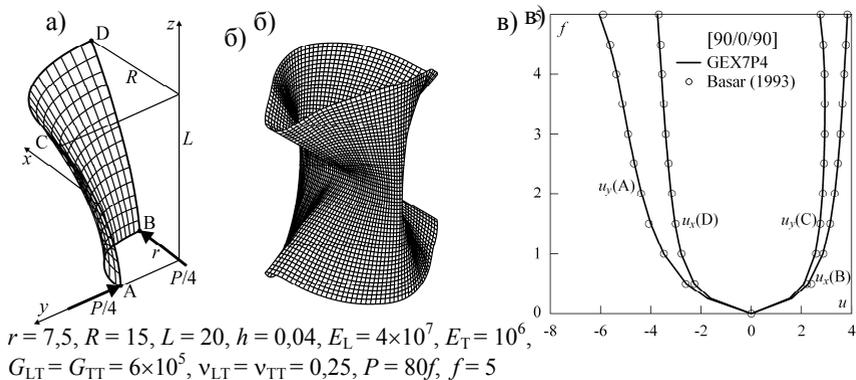
Для верификации построенной модели результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными, полученными, Кроли и Лазарусом и аналитическими решениями, найденными Рзем, Рао и Саманта. Получено качественное совпадение результатов. Также была решена задача нелинейного деформирования анизотропной консольной пластины с сегментированными пьезокерамическими накладками, получено удовлетворительное совпадение с результатами Тана и Ву-Куока, причем если для нахождения деформированного состояния пластины под действием электрической нагрузки $\phi^A = 1576$ В указанным авторам потребовалось 10 шагов по нагрузке, то в диссертации задача решена за один шаг по нагрузке и 10 итераций метода Ньютона-Рафсона.

Также в шестой главе решается задача оптимизации формы оболочки, подверженной электромеханическим воздействиям. Разработанная модель позволяет определить напряжения на пьезоэлектрических актуаторах, приближающих форму конструкции к заранее заданной. Задача сводится к минимизации функции погрешности, которая задается как разность между деформированной формой оболочки и аналитически заданной функцией требуемой формы.

В седьмой главе приведены результаты численного моделирования нелинейного деформирования тонкостенных конструкций на основе разработанных геометрически точных конечных элементов оболочки.

Рассмотрена трехслойная композитная гиперболическая оболочка при различных направлениях армирования, которая уравнивается двумя парами противоположно направленных сил (рис.8а). На рис. 8в приведены перемещения срединной поверхности в направлениях осей Ox

и Oy , приведено сравнение с результатами, полученными в работах Басара при расчетах соответственно на сетке 28×28 вырожденных элементов с билинейной аппроксимацией перемещений. Для более жесткой гиперболической оболочки с углами армирования $[0/90/0]$ конечный результат может быть получен с помощью элемента GEX7P4 всего за один шаг по нагрузке и 7 итераций метода Ньютона. Для более мягкой оболочки с направлениями укладки слоев $[90/0/90]$, деформированное состояние которой приведено на рис. 8б, для достижения конечного результата в зависимости от сетки требуется от 2 до 6 равномерных шагов по нагрузке.



$r = 7,5, R = 15, L = 20, h = 0,04, E_L = 4 \times 10^7, E_T = 10^6,$
 $G_{LT} = G_{TT} = 6 \times 10^5, \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25, P = 80f, f = 5$

Рисунок 8. Трехслойная гиперболическая оболочка под действием сосредоточенной нагрузки : а) геометрия; б) деформированная конфигурация; в) перемещения срединной поверхности.

Далее моделировались оболочки вращения сложной геометрии. Рассмотрены оболочки, отсчетная поверхность которых получена вращением кривой, причем эта кривая описана конечной совокупностью принадлежащих ей точек. В этом случае геометрические параметры отсчетной поверхности находились путем вычисления производных сглаживающих кубических сплайнов. Была решена задача деформирования секции полиуретановой шины под действием концентрированной силы.

Также рассмотрена торообразная изотропная оболочка под действием следящей нагрузки. Сравнение результатов расчетов с помощью элемента GEX7P4F и элемента GEX7P4 показало, что в этой задаче влияние следящего характера нагружения является существенным.

Далее моделировалось контактное взаимодействие цилиндрической оболочки, на которую действует сосредоточенная сила, с абсолютно жестким цилиндром радиуса R_b , ось которого перпендикулярна оси цилиндрической оболочки (рис. 9а). В силу симметрии задачи рассчитывается четвертая часть оболочки с помощью равномерной сетки 10×30 или 20×60 . В таблице 5 приведены результаты исследования сходимости при контакте с жестким цилиндром радиуса $R_b = 1000$. Здесь $u_3^M(A)$ и $u_3^M(B)$ – поперечные перемещения в точках А и В оболочки, $\tilde{P} = 120(1 - \nu^2)PR^2 / Eh^3L$ – безразмерное усилие, приложенное к оболочке и \tilde{P}_c – безразмерная результирующая контактного давления. На рис. 9б показана деформированная конфигурация цилиндрической оболочки при $\tilde{P} = 87,5$.

В следующем параграфе рассмотрена анизотропная перекрестно армированная резинокордная торообразная оболочка кругового поперечного сечения, нагруженная равномерно распределенным по внутренней поверхности давлением p_0 (рис. 10а). Оболочка состоит из четырех слоев толщины $h_k = 1,2$ мм каждый, направление укладки слоев $[-45/45/-45/45]$. Исходные характеристики элементарных резинокордных слоев выбираем так, что с помощью этой оболочки можно было моделировать поведение диагональной шины. В качестве отсчетной поверхности примем срединную поверхность оболочки, которая образована вращением части окружности радиусом $R = 50$ мм. Расстояние от оси вращения до экватора срединной поверхности $R_0 = 250$ мм, сечения оболочки с координатами $\pm 120^\circ$ жестко защемлены. Решение этой задачи может быть найдено за один шаг по нагрузке, точность $\varepsilon_N = 10^{-6}$ достигается за 5 итераций. Как показано на рис. 10б, влияние следящего нагружения в данном случае незначительно.

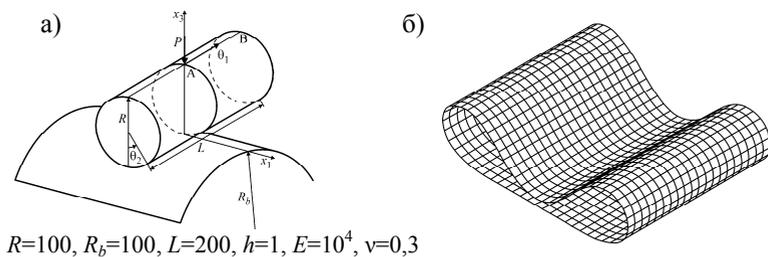


Рисунок 9. Контакт цилиндрической оболочки с жестким цилиндром:
а) геометрия б) деформированное состояние.

Таблица 5. Исследование сходимости для цилиндрической оболочки при $\tilde{P} = 87,5$, $R_b = 1000$, $\varepsilon_N = 10^{-8}$, где $\varphi_0 = \pi/60$, $d_1 = \{40\} \times [0; 14\varphi_0]$ и $d_2 = [0; 40] \times \{14\varphi_0\}$.

начальная зона контакта	сетка	e	NStep	NTE	NIter	\tilde{P}_c	$-u_3^M(A)$	$-u_3^M(B)$
$\{0\} \times \{0\}$	10×30	10^0	5	42	231	87,90	194,3	193,5
$\{0\} \times \{0\}$	10×30	10^2	5	45	259	87,90	194,3	193,5
$\{0\} \times \{0\}$	20×60	10^0	5	51	296	87,60	195,7	194,7
$\{0\} \times \{0\}$	20×60	10^2	5	62	335	87,60	195,7	194,7
$d_1 \cup d_2$	10×30	10^0	1	4	35	87,90	194,3	193,5
$d_1 \cup d_2$	10×30	10^2	1	6	53	87,90	194,3	193,5
$d_1 \cup d_2$	20×60	10^0	1	5	43	87,60	195,7	194,7
$d_1 \cup d_2$	20×60	10^2	1	5	41	87,60	195,7	194,7

Далее та же самая оболочка, нагруженная равномерно распределенным по внутренней поверхности давлением $p_0 = 0,5$ МПа, обжимается на плоское или цилиндрическое основания путем перемещения последних на величину Δ таким образом, что зашпеченные сечения оболочки с координатами $\pm 120^\circ$ остаются неподвижными. Результаты расчета с помощью нерегулярных конечно-элементных 48×36 сеток при $e = 10^4$ показаны на рис. 11. Здесь также решение может быть получено за один шаг по нагрузке, однако, влияние следящего давления проявляется в большей степени. Так погрешность вычисления результирующей узловых контактных сил с учетом и без учета следящего нагружения составляет 17,8 %. Дополнительно на рис. 10в представлена зависимость контактного давления p_c^+ от координаты θ_1 в центральном сечении оболочки при $R_b = 1000$ мм и $\Delta = 17$ мм. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными данными о том, что максимальные значения контактного давления в шине смещаются к границе контактной области.

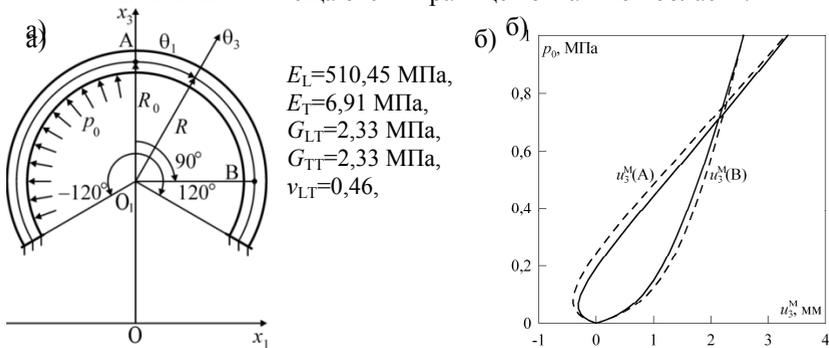


Рисунок 10. Перекрестно армированная торообразная оболочка: а) геометрия и механические характеристики; б) кривые нагрузка-прогиб с учетом следящего нагружения (—) и без учета (---)

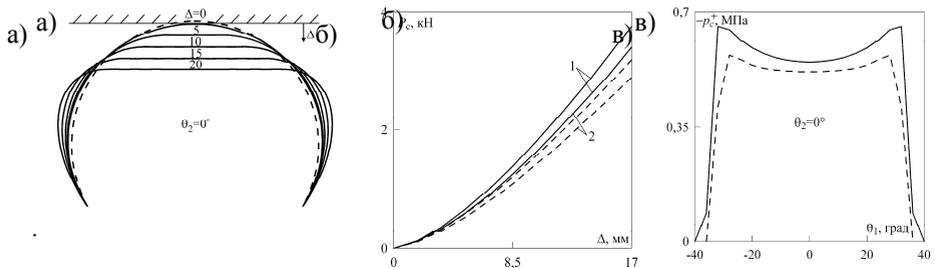


Рисунок 11. Контакт торообразной оболочки с плоскостью: а) деформированное состояние сечения; б) кривые нагрузка-прогиб с учетом следящего нагружения (—) и без учета (---): 1 – $R_b = \infty$; 2 – $R_b = 1000$ мм; в) распределение контактного давления.

Также рассмотрена спиральная оболочка (рисунок 12а), изготовленная из пьезокерамики PZT-5Н. Спиральная оболочка, выполняющая функции актюатора, состоит из четырех полных витков. Лицевые поверхности оболочки покрыты электродами, на которые подается напряжение

$\varphi^A = 100$ В. Оболочка моделировалась регулярными конечно-элементными сетками. В таблице 6 дан анализ сходимости предложенного геометрически точного элемента оболочки. Приведено сравнение с результатами, полученными путем использования трехмерного изопараметрического элемента из коммерческого пакета программ ABAQUS. Как видим, значения поперечного перемещения на свободном крае хорошо согласуются друг с другом. Эти данные также свидетельствуют о возможности использования достаточно редких конечно-элементных сеток. Дополнительно на рис. 12б показана зависимость перемещений срединной поверхности оболочки от окружной координаты при $\varphi^A = 2000$ В.

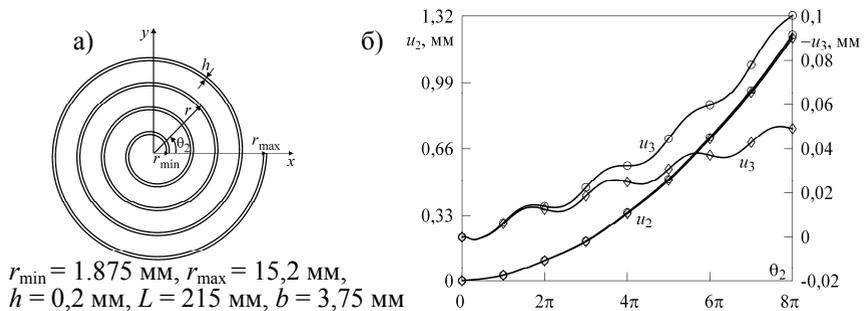


Рисунок 12. Спиральный актюатор под действием электрической нагрузки: а) геометрия; б) перемещения срединной поверхности нелинейное решение (—○—) и линейное решение (---◇---).

Таблица 6. Окружное перемещение граничной точки.

Элемент	GEX7P4E								C3D8E (ABAQUS)
	1×16	2×16	4×16	1×32	2×32	4×32	1×64	1×128	
$-u_3^M$, $\mu\text{м}$	2,109	2,102	2,100	2,625	2,620	2,619	2,503	2,460	2,59
u_2^M , $\mu\text{м}$	58,18	58,16	58,15	59,95	59,88	59,87	60,55	60,72	41,47

Далее была рассчитана трехслойная ортотропная гиперболическая оболочка с направлениями укладки слоев $[90/0/90]$ с механическими характеристиками материала: $E_L=4 \times 10^7$ Н/см², $E_T=10^6$ Н/см², $G_{LT}=G_{TT}=6 \times 10^5$ Н/см², $\nu_{LT}=\nu_{TT}=0,25$. В центральной части оболочки на ее лицевых сторонах размещены восемь пьезоэлектрических накладок из материала, ненулевые механические и пьезоэлектрические константы которого $E=20$ ГПа, $G=7,7$ ГПа, $\nu=0,3$, $d_{31}=d_{32}=2 \times 10^{-9}$ м/В. Геометрия оболочки и конечно-элементная сетка 16×16 , использованная при вычислениях, показаны на рисунке 13а. В плоскости $z=0$ гиперболоид симметрично нагружается двумя парами растягивающих и сжимающих сил величиной $F=200$ Н. Пьезоэлектрические накладки на внутренней и внешней поверхностях оболочки поляризованы в противоположных направлениях, параллельных поперечной координате θ_3 . К электродам, расположенным на внешних поверхностях пьезоэлектриков, прикладываются электрические потенциалы разных знаков φ^A и $-\varphi^A$, что приводит к устранению механической деформации оболочки. Таким образом, возникает возможность управления процессом деформирования тонкостенных композитных конструкций

за счет использования обратного пьезоэлектрического эффекта (рис.14). На рисунках 13б и 13в показаны перемещения срединной поверхности оболочки u_x и u_y в точках А, В, С, D, где u_x , u_y - перемещения в направлении осей ox и oy , соответственно. Как видим, приложенное к электродам напряжение величиной 1960 В практически возвращает оболочку к ее недеформированному состоянию.

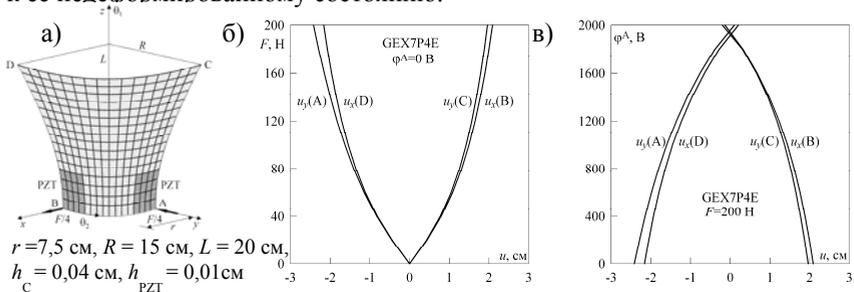


Рисунок 13. Гиперболическая оболочка с сегментированными PZT актюаторами: а) геометрия; перемещения срединной поверхности гиперболической оболочки в точках А, В, С, D б): при $\varphi^A = 0$; в) при $F = 200$ Н.

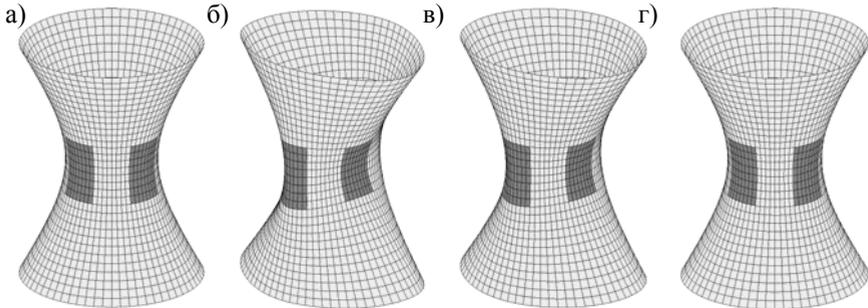


Рисунок 14. Конфигурация оболочки при: а) $F = 0$, $\varphi^A = 0$; б) $F = 200$ Н, $\varphi^A = 0$; в) $F = 200$ Н, $\varphi^A = 1000$ В; г) $F = 200$ Н, $\varphi^A = 1960$ В.

В следующем параграфе обсуждаются результаты решения задач оптимизации формы пластин и оболочек при электро-механическом воздействии. Рассмотрена жестко закрепленная при $x=0$ пластина со стороной $a=0,2$ м, геометрия которой приведена на рис.15. Основу пластины составляет четырех-слойный углепластик AS4/3501 с укладкой слоев $[90/0]_s$. На лицевых поверхностях пластины имеется по 25 квадратных накладок из пьезокерамики G1195. Пластина моделируется сеткой 10×10 элементов, так что каждая накладка занимает 4 элемента.

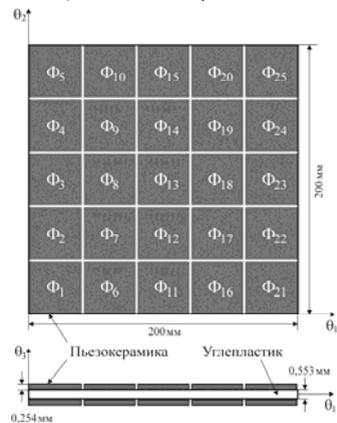


Рисунок 15. Пластина с 50 пьезо-керамическими накладками

Ставилась задача привести пластину к форме, за задаваемой уравнением $z = 0,1x(y - a/2)$ (рис. 16а). На рис. 16б приведена деформированная форма пластины, полученная в результате решения задачи оптимизации формы. Оптимальные напряжения на накладках, расположенных на поверхности Ω^+ приведены в таблице 7. Напряжения на накладках, расположенных на поверхности Ω^- , по абсолютной величине совпадают с приведенными в таблице 7, но имеют противоположный знак.

Таблица 7. Напряжения на пьезокерамических накладках (В).

Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}
-252	-181	0	181	252	-147	-4	0	4	147	-137	1	0
Φ_{14}	Φ_{15}	Φ_{16}	Φ_{17}	Φ_{18}	Φ_{19}	Φ_{20}	Φ_{21}	Φ_{22}	Φ_{23}	Φ_{24}	Φ_{25}	
-1	137	-70	-2	0	2	70	45	29	0	-29	-45	

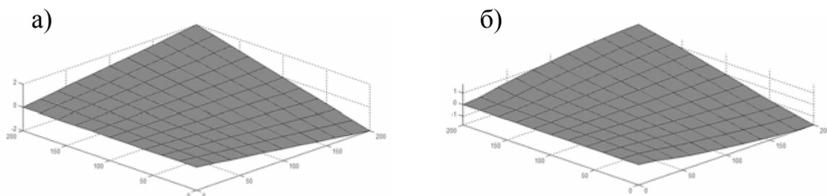


Рис. 15. Деформированная прямоугольная пластина
а) заданная форма б) расчетная форма

В последнем параграфе диссертации моделируется деформирование тонкостенных конструкций при термоэлектро механическом нагружении.

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Предложен принципиально новый подход к моделированию нелинейного деформирования и контактного взаимодействия тонкостенных упругих и электроупругих конструкций, использующий 7-параметрическую модель оболочек и геометрически точные конечные элементы.
2. Построена 7-параметрическая модель слоистой оболочки в конвективных криволинейных координатах. Предложенная модель позволяет корректно описывать произвольно большие перемещения оболочки как жесткого тела и использовать полные уравнения состояния трехмерной теории упругости и электроупругости.
3. На основе разработанной 7-параметрической модели построена конечно-элементная модель оболочки. Предложенный в работе подход к построению гибридного конечного элемента с использованием метода введенных деформаций позволяет записать матрицу жесткости элемента в явном виде, без использования численного интегрирования, и получать результаты с высокой точностью на редких сетках. Деформационные соотношения разработанной модели позволяют решать задачи нелинейного деформирования тонкостенных конструкций за малое число итераций.
4. Разработана модель оболочки, подверженной действию следящего нагружения, в которой аналитически выражается нормаль к отсчетной поверхности в деформированном состоянии, за счет чего удается получать решение задач нелинейного деформирования за малое число итераций.
5. Разработана модель контактного взаимодействия оболочки с жестким выпуклым основанием, в которой контактные ограничения для деформированной оболочки записываются аналитически. Построенная на ее основе конечно-элементная модель позволяет получать решение задач кон-

6. Разработана аналитическая модель нелинейного деформирования электроупругих конструкций. Построенная на ее основе конечно-элементная модель позволяет получать решение актуаторных задач нелинейного деформирования, как правило, за один шаг по нагрузке и за малое число итераций в методе Ньютона-Рафсона.

7. Адекватность и эффективность предложенных моделей подтверждена сравнением результатов расчета по разработанным в диссертации моделям с экспериментальными данными, аналитическими решениями, результатами расчетов с помощью трехмерных конечных элементов и других классов конечных элементов оболочки.

8. Решены задачи моделирования и оптимизации формы тонкостенных конструкций за счет обратного пьезоэлектрического эффекта.

9. Разработанные численные алгоритмы реализованы в пакете программ для ЭВМ, написанных на языке программирования Delphi и предназначенных для моделирования в пространственной постановке слоистых композитных оболочек. Точность расчета тонкостенных конструкций с помощью разработанного пакета программ сопоставима с точностью расчета по коммерческим конечно-элементным программам с применением трехмерных конечных элементов, однако существенно превосходит их в скорости расчета, что достигается за счет использования редких конечно-элементных сеток и малого числа итераций метода Ньютона-Рафсона, а также построением матрицы жесткости элемента в аналитическом виде, без использования численного интегрирования.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов докторских диссертаций

1 Плотникова, С.В. Управление формой слоистых композитных оболочек с пьезоэлектрическими актуаторами / С.В. Плотникова // Вестник ТГТУ. - 2011. - Т. 17, № 3. - С. 735-743.

2 Куликов, Г.М. Решение задачи статики для упругой оболочки в пространственной постановке / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова / Доклады Академии наук. - 2011, Т. 439, № 5. - С. 613-616.

3 Kulikov, G.M. Exact geometry piezoelectric solid-shell element based on 7-parameter model /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. - 2011. - Vol. 18, № 2. - P. 133-146.

4 Kulikov, G.M. Non-linear exact geometry 12-node solid-shell element with three translational degrees of freedom per node /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2011. - Vol. 88, № 13. - P. 1363-1389.

5 Плотникова, С.В. Управление формой композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками, подверженных термомеханическому воздействию /С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Вестник Университета им. Вернадского. - 2011. - № 3(34). - С. 72-80.

6 Kulikov, G.M. Finite rotation piezoelectric exact geometry solid-shell element with nine degrees of freedom per node/G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computers, Materials & Continua. - 2011. - Vol. 23, № 3. - P. 233-264.

7 Плотникова, С.В. Применение трехмерного элемента оболочки для расчета композитных конструкций с пьезоэлектрическими накладками /С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Вестник ТГТУ. - 2010. - Т. 16, № 2. - С. 375-386.

- 8 Куликов, М.Г. Расчет адаптивных многослойных тонкостенных конструкций, подверженных температурному воздействию /М.Г. Куликов, С.В. Плотникова, // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. – № 2 (18). – С. 7-17.
- 9 Kulikov, G.M. A family of ANS four-node exact geometry shell elements in general convected curvilinear coordinates /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2010. - Vol. 83, № 10. - P. 1376-1406.
- 10 Куликов, Г.М. Решение связанной задачи термопьезоэлектричества на основе геометрически точного элемента оболочки /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов¹. - 2010. - Т. 46, № 4. - С. 513-534.
- 11 Куликов, Г.М. Контактное взаимодействие композитных оболочек под действием следящих нагрузок с жестким выпуклым основанием /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. - 2010. - Т. 46, № 1. - С. 61-78.
- 12 Плотникова, С.В. Расчет композитных оболочек с пьезоэлектрическими накладками /С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Вестник ТГТУ. - 2009. - Т. 15, № 2. - С. 380-391.
- 13 Куликов, Г.М. Вариационные уравнения термоэлектроупругости для многослойной композитной оболочки /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, В.П. Ярцев // Вестник ТГТУ. - 2009. - Т. 15, № 3. - С. 628-637.
- 14 Куликов, Г.М. Расчет композитных конструкций под действием следящих нагрузок с использованием геометрически точного элемента оболочки /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. - 2009. - Т. 45, № 6. - С.789-804.
- 15 Kulikov, G.M. Finite rotation geometrically exact four-node solid-shell element with seven displacement degrees of freedom /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Modeling in Engineering & Sciences. - 2008. - Vol. 28, № 1. - P. 15-38.
- 16 Kulikov, G.M. Geometrically exact four-node piezoelectric solid-shell element /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova //Mechanics of Advanced Materials and Structures. - 2008. - Vol. 15, № 3-4. - P. 199-207.
- 17 Kulikov, G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part III. Analysis of TM shells with constraints /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2007. - Vol. 196, № 7. - P. 1203-1215.
- 18 Kulikov, G.M. Non-linear geometrically exact assumed stress-strain four-node solid-shell element with high coarse-mesh accuracy /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Finite Elements in Analysis and Design. - 2007. - Vol. 43, № 6-7. - P. 425-443.
- 19 Kulikov, G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part II. Enhanced finite element technique /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2006. - Vol. 195, № 19-22. - P.2209-2230.
- 20 Kulikov, G.M. Geometrically exact assumed stress-strain multilayered solid-shell elements based on the 3D analytical integration /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova //Computers & Structures. - 2006. - Vol. 84, № 19-20. - P. 1275-1287.

¹ Переводная версия: Mechanics of Composite Materials, изд-во Springer, ISSN 0191-5665

- 21 Kulikov, G.M. Equivalent single-layer and layer-wise shell theories and rigid-body motions - Part II: Computational Aspects /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. - 2005. - Vol. 12. - P.331-340.
- 22 Kulikov, G.M. Equivalent single-layer and layer-wise shell theories and rigid-body motions - Part I: Foundations /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Mechanics of Advanced Materials and Structures. - 2005. - Vol. 12. - P. 275-283.
- 23 Kulikov, G.M. Non-conventional non-linear two-node hybrid stress-strain curved beam elements /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Finite Elements in Analysis and Design. - 2004. - Vol. 40, № 11. - P.1333-1359.
- 24 Kulikov, G.M. Finite deformation plate theory and large rigid body motions /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // International Journal of Non-Linear Mechanics. - 2004. - Vol. 39, № 7. - P.1093-1109.
- 25 Куликов, Г.М. Контактное взаимодействие упругой пластины с жестким телом. 2. Геометрически нелинейная постановка /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Вестник ТГТУ. - 2004. - Т. 10, № 2. - С.519-534.
- 26 Куликов, Г.М. Контактное взаимодействие упругой пластины с жестким телом. 1.Геометрически линейная постановка /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова, Д.В. Казаков// Вестник ТГТУ. - 2004. - Т. 10, № 1Б. - С.180-194.
- 27 Григолюк, Э.И. Контактная задача для пневматической шины, взаимодействующей с жестким основанием / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2004. - № 5. - С.55-63.
- 28 Куликов, Г.М. Контактная задача для геометрически нелинейной оболочки типа Тимошенко /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Прикладная математика и механика. - 2003. - Т. 67, № 6. - С. 940-953.
- 29 Kulikov, G.M. Non-linear strain-displacement equations exactly representing large rigid-body motions. Part I. Timoshenko-Mindlin shell theory/G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2003. - Vol. 192, № 7-8. - С.851-875.
- 30 Kulikov, G.M. Efficient mixed Timoshenko-Mindlin shell elements /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2002. - Vol. 55, № 10. - P.1167-1183.
- 31 Kulikov, G.M. Simple and effective elements based upon Timoshenko-Mindlin shell theory /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2002. - Vol. 191, № 11-12. - P.1173-1187.
- 32 Куликов, Г.М. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 2. Геометрически нелинейная постановка /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. - 2002. - Т. 38, № 6. - С.815-826.
- 33 Kulikov, G.M. Zur inneren Mechanik des Radialreifens. Teil 2.: Geschichtete Kompositschale mit diskreten Verschiebungsansätzen für die einzelnen Schichten /G.M. Kulikov, F. Bohm, A. Duda, R.Wille, S.V. Plotnikova // Technische Mechanik. - 2000. - Bd. 20, № 1. - S.81-90.
- 34 Куликов, Г.М. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. - 2002. - Т. 38, № 5. - С.607-620.
- 35 Куликов, Г.М. Об использовании смешанных конечноэлементных аппроксимаций в механике оболочек /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова //

- 36 Григолюк, Э.И. Влияние граничных условий в точке обода на напряженно-деформированное состояние радиальных шин /Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова// Каучук и резина. - 2000. - № 3. - С.32-35.
- 37 Куликов, Г.М. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. II. Учет поперечного обжатия /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С.435-446.
- 38 Куликов, Г.М. Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. I. Учет поперечных сдвигов /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 3. С.347-358.
- 39 Куликов, Г.М. Численное решение контактной задачи для многослойных композитных пластин /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Вестник ТГТУ. 1998. Т.4. № 4. С.526-538.

Другие публикации

- 40 Плотникова, С.В. Построение трехмерного элемента для расчета композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками /С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Математические методы в технике и технологиях. Сборник трудов XXIII Международной научной конференции. Т. 5. – Саратов, 2010. – С. 43-47.
- 41 Куликов, М.Г. Моделирование слоистых пластин с пьезоэлектрическими накладками при температурном воздействии /С.В. Плотникова, М.Г. Куликов // Математические методы в технике и технологиях. Сборник трудов XXIII Международной научной конференции Т. 5. – Саратов, 2010. – С. 55–57.
- 42 Плотникова, С.В. Применение МКЭ для расчета композитных оболочек с пьезоэлектрическими накладками при температурном воздействии /С.В. Плотникова, Г.М. Куликов // Труды второй международной конференции "Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела", Казань, 8-11 декабря 2009 г. - С. 288-291.
- 43 Kulikov, G.M. Non-linear geometrically exact solid-shell element under follower loads /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Proceedings of the 9th Conference "Shell Structures: Theory and Applications", 14-16 October 2009, Gdansk-Jurata, Poland. - CRC Press, Taylor & Francis, 2009. - P. 257-260.
- 44 Plotnikova, S.V. Piezoelectric four-node geometrically exact solid-shell element with seven displacement degrees of freedom /S.V. Plotnikova, M.G. Kulikov // Proceedings of the International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 8-13 April 2009, Phuket, Thailand. - Tech Science Press. - P. 84-86.
- 45 Куликов Г.М., Контактное взаимодействие многослойной композитной оболочки вращения с жестким выпуклым основанием /Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Избранные проблемы прочности современного машиностроения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - С. 157-167.
- 46 Kulikov, G.M. Geometrically Exact Assumed Stress-Strain Four-Node Element Based on the 9-Parameter Shell Model /G.M. Kulikov, E. Carrera, S.V. Plotnikova, S. Brischetto // Proceedings of the International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, Tech Science Press, 2008, Vol. 5, No. 3, pp. 187-192.
- 47 Григолюк, Э.И. Численное решение геометрически нелинейной контактной задачи для шины /Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Девятая международная научно-техническая конференция по динамике и прочности автомобиля. - Москва, 15-17 марта 2005. - С.86-90.

- 48 Kulikov, G.M. Assumed stress-strain four-node elements based on the finite deformation first-order theory of multilayered shells /G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Proceedings of the 2004 International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 26-29 July 2004, Madeira, Portugal. - Tech Science Press, 2004. - P. 2041-2046.
- 49 Григолюк, Э.И. Контактная задача для многослойной анизотропной оболочки вращения /Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Проблемы шин и резинокордных композитов. Труды одиннадцатого симпозиума. Т.1. - М.: НИИШП. 2000. - С.189-197.
- 50 Куликов. Г.М. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007611939 "TMS3D - программа расчета нелинейных композитных тонкостенных конструкций в трехмерной постановке на основе геометрически точных четырехузловых конечных элементов" / Куликов Г.М., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14 мая 2007 г.
- 51 Куликов. Г.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009611797 "TMS3DE6 - программа расчета многослойных композитных тонкостенных конструкций, подверженных электромеханическим воздействиям, на основе геометрически точных билинейных элементов оболочки" / Куликов Г.М., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 апреля 2009 г.
- 52 Куликов. Г.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009613342 "TMS3DTE6 - программа расчета многослойных композитных тонкостенных конструкций, подверженных термоэлектромеханическим воздействиям, на основе геометрически точных билинейных элементов оболочки" / Куликов Г.М., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 26 июня 2009 г.
- 53 Куликов. Г.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010613022 " TMS3DE7 – программа расчета слоистых композитных оболочек, подверженных электромеханическим воздействиям, на основе геометрически точного 7-параметрического билинейного конечного элемента" / Куликов Г.М., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 мая 2010 г.
- 54 Куликов. Г.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615621 "TMS3DTE7 – программа расчета слоистых композитных оболочек, подверженных термоэлектромеханическим воздействиям, на основе геометрически точного 7-параметрического билинейного конечного элемента" / Куликов Г.М., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31 августа 2010 г.
- 55 Плотникова. С.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615098 "Геометрически точный трехмерный конечный элемент пьезоэлектрической композитной оболочки TMS3DE9 для решения связанной задачи электроупругости"/ Плотникова С.В., Куликов М.Г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29 июня 2011 г.
- 56 Куликов. М.Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011614436 "Геометрически точный трехмерный пьезоэлектрический конечный элемент оболочки TMS3DTE9 для упругого деформирования тонкостенных слоистых композитных конструкций под действием термоэлектромеханического нагружения" / Куликов М.Г., Плотникова С.В. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 10 августа 2011 г.